1	2	3	4	5	6	7	8	Toplam

Ad-Soyad :

Numara :

29.05.2019

2018-2019 ÖĞRETİM YILI ANALİZ IV DERSİ FİNAL SINAVI

1- Yüzey alanı 54 birim kare olan dikdörtgen prizma biçimindeki kutunun en büyük hacme sahip olmasını sağlayan kenar uzunluklarını Lagrange çarpımı yöntemi ile bulunuz.

2- $x^2y^2+2e^{xy}-4-2e^2=0$ denkleminin $x=1$ noktasının bir komşuluğundaki her x için $y=f(x),\ f(1)=2$ biçiminde bir çözümünün olduğunu gösteriniz. $\dfrac{dy}{dx}$ türevini $x=1$ noktasında hesaplayınız.

3- a) $f(x,y)=x^2\cos y+1$ fonksiyonunun grafiğinin altında ve $A=\{(x,y):-1\le x\le 1,\ -\pi\le y\le \pi\}$ dikdörtgeninin üstünde kalan katı cismin hacmini bulunuz.

b) $\displaystyle\int_0^3\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^1 e^{y^3}dydx$ integralini hesaplayınız.

4- $f(x,y)=e^{xy}$ fonksiyonuna $(1,1)$ noktasında 2. dereceden Taylor polinomunu yazınız.

5- $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy+x+y$ fonksiyonu ve $P=(1,2)$, $Q=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{3}\right)$ noktaları verilsin.

Ortalama değer teoremini uygulayarak c noktasını bulunuz.

6- $U\subset\mathbb{R}^n$ bir açık alt küme ve $x_0\in U$ olsun. Eğer bir $f:U\to\mathbb{R}^p$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirse bu noktada süreklidir, ispatlayınız.

7- $U\subset\mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Bir $f:U\to\mathbb{R}^2$ fonksiyonu $f(x)=(f_1(x),f_2(x))$ şeklinde tanımlansın. x_0, U kümesinin bir yığılma noktası olsun. $w=(w_1,w_2)$ olmak üzere $\lim_{x\to x_0} f(x)=w$ olması için gerekli ve yeterli koşul $i=1,2$ için $\lim_{x\to x_0} f_i(x)=w_i$ olmasıdır, ispatlayınız.

8- $F(x,y)=(x+x^2+y,\ x^2+y^2)$ fonksiyonunun $(x,y)=(5,8)$ noktası civarında C^1- terslenebilir olup olmadığını araştırınız. Varsa, tersinin türevini bulunuz.

Not: **Sadece 6 tane soru cevaplayınız. Süre 110 dakikadır.**

BAŞARILAR….

Prof. Dr. Cenap DUYAR - Doç. Dr. Ayşe SANDIKÇI

Cevaplar

1- Dikdörtgen prizmanın ayrıt uzunlukları: $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$. Hacim: $x.y.z$.

En büyük olması istenen hacim fonksiyonu: $f(x,y,z) = x.y.z$

Yüzey alanı: $2xy + 2xz + 2yz$. Yan koşul: $2xy + 2xz + 2yz = 54$.

Yan koşul: $g(x,y,z) = xy + xz + yz - 27 = 0$.

$f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ olduğu açık.

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Rightarrow (yz, xz, xy) = \lambda(y+z, x+z, x+y)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(x+y) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lambda = \frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z} = \frac{xy}{x+y}$$

$$\Rightarrow (xyz + yz^2 = xyz + xz^2 \ \ den \ \ x = y)$$

$$\wedge (x^2z + xyz = x^2y + xyz \ \ den \ \ y = z)$$

$$\Rightarrow x = y = z = t \ ve \ xy + xz + yz = 27 \ \ den \ 3t^2 = 27$$

$$\Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$$

olduğuna göre en büyük kenar hacimli prizmanın kenar uzunlukları: $(x,y,z) = (3,3,3)$.

2- $F(x,y) = x^2y^2 + 2e^{xy} - 4 - 2e^2 = 0,\ F \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$F(1,2) = (1)^2(2)^2 + 2e^{(1)(2)} - 4 - 2e^2 = 0$$

$$\wedge \ \frac{\partial F}{\partial y}(1,2) = \left(2x^2y + 2xe^{xy}\right)\Big|_{(1,2)} = 2(1)^2(2) + 2(1)(e^2) = 4 + 2e^2 \neq 0$$

olduğundan kapalı fonksiyon teoreminin koşulları gerçekleşir, o halde istenen $y = f(x)$

fonksiyonu vardır ve

$$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{F_x(1,2)}{F_y(1,2)} = -\frac{2xy^2 + 2ye^{xy}}{2x^2y + 2xe^{xy}}\Bigg|_{(1,2)} = -\frac{8 + 4e^2}{4 + 2e^2} = -2$$

elde edilir.

3- a)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1}\left[x^2\cos y+1\right]dxdy=?$$

$$\int_{-1}^{1}\left[x^2\cos y+1\right]dx=\left[\frac{x^3}{3}\cos y+x\right]_{x=-1}^{x=1}$$

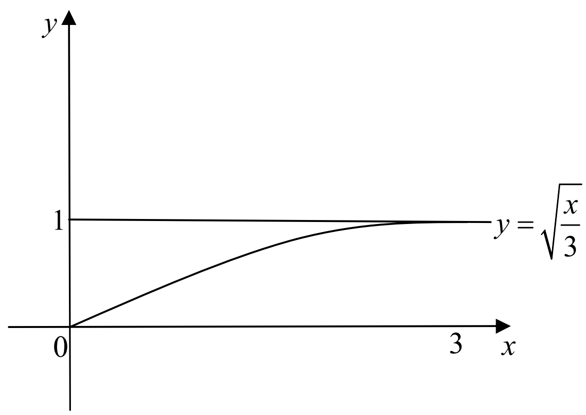
$$=\left(\frac{\cos y}{3}+1\right)-\left(-\frac{\cos y}{3}-1\right)=\frac{2}{3}\cos y+2$$

ve

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1}\left[x^2\cos y+1\right]dxdy=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{2}{3}\cos y+2\right]dy=\left[\frac{2}{3}\sin y+2y\right]_{y=-\pi}^{y=\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\sin\pi+2\pi-\frac{2}{3}\sin(-\pi)-2(-\pi)=4\pi$$

b) İlk olarak integral alınacak bölgeyi gösterelim.



Eğer $y=\sqrt{\frac{x}{3}}\Rightarrow x=3y^2$ olup, Fubini Teoreminden

$$\int_{0}^{3}\int_{\sqrt{\frac{x}{3}}}^{1}e^{y^3}dydx=\int_{0}^{1}\int_{0}^{3y^2}e^{y^3}dxdy=\int_{0}^{1}e^{y^3}3y^2dy=e^{y^3}\Big|_0^1=e-1$$

elde edilir.

4-

$$
\begin{aligned}
&f(x,y)=e^{xy},\ (x,y)=(1,1)\\
&f(1,1)=e;\quad f_x(x,y)=ye^{xy}\Rightarrow f_x(1,1)=e;\\
&f_y(x,y)=xe^{xy}\Rightarrow f_y(1,1)=e;\quad f_{xx}(x,y)=y^2e^{xy}\Rightarrow f_{xx}(1,1)=e;\\
&f_{xy}(x,y)=e^{xy}+xye^{xy}\Rightarrow f_{xy}(1,1)=2e;\\
&f_{yy}(x,y)=x^2e^{xy}\Rightarrow f_{yy}(1,1)=e
\end{aligned}
$$

olup, $f(x,y)=e^{xy}$ fonksiyonunun $(1,1)$ noktasındaki 2. dereceden Taylor polinomu

$$
\begin{aligned}
P_2(x-1,y-1)&=f(1,1)+f_x(1,1)(x-1)+f_y(1,1)(y-1)\\
&+\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(1,1)(x-1)^2+2f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1)+f_{yy}(1,1)(y-1)^2\right)\\
&=e+e(x-1)+e(y-1)+\frac{1}{2}\left(e(x-1)^2+2.2e(x-1)(y-1)+e(y-1)^2\right)\\
&=e+e(x-1)+e(y-1)+\frac{1}{2}e(x-1)^2+2e(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}e(y-1)^2
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

5- $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy+x+y\,,\quad P=(1,2)\,,\ Q=\left(\frac{3}{2},\frac{7}{3}\right)$

$f\in C^1(\mathbb{R}^2)$ olduğundan Ortalama Değer teoremine göre PQ doğrusu üzerinde ve P ile Q

noktaları arasında

$$f(Q)-f(P)=Df(C).(Q-P) \qquad \text{... (1)}$$

koşulunu sağlayan bir C noktası vardır. O zaman bir $t_0\in(0,1)$ için

$$C=(1-t_0).P+t_0.Q=(1-t_0).(1,2)+t_0.\left(\frac{3}{2},\frac{7}{3}\right)=\left(1+\frac{t_0}{2},2+\frac{t_0}{3}\right)$$

olmalıdır. (1) ifadesindeki bileşenler hesaplanıp, yerlerine konursa

$$
\begin{aligned}
&f(Q)=f\left(\frac{3}{2},\frac{7}{3}\right)=\frac{9}{4}+2.\frac{49}{9}-2.\frac{3}{2}.\frac{7}{3}+\frac{3}{2}+\frac{7}{3}=\frac{359}{36};\\
&f(P)=f(1,2)=1+2.4-2.1.2+1+2=8;\\
&Df(x,y)=(f_x,f_y)=(2x-2y+1,4y-2x+1)
\end{aligned}
$$

$$Df(C)=\left(2\left(1+\frac{t_0}{2}\right)-2\left(2+\frac{t_0}{3}\right)+1,4\left(2+\frac{t_0}{3}\right)-2\left(1+\frac{t_0}{2}\right)+1\right)=\left(-1+\frac{t_0}{3},7+\frac{t_0}{3}\right)$$

$$\Rightarrow f(Q)-f(P)=Df(C).(Q-P),$$

$$\frac{359}{36}-8=\left(-1+\frac{t_0}{3},7+\frac{t_0}{3}\right).\left[\left(\frac{3}{2},\frac{7}{3}\right)-(1,2)\right],$$

$$\frac{71}{36}=\left(-1+\frac{t_0}{3},7+\frac{t_0}{3}\right).\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),$$

$$\frac{71}{36}=\frac{11}{6}+\frac{5t_0}{18}\Rightarrow\frac{5}{36}=\frac{5t_0}{18}\Rightarrow t_0=\frac{1}{2}\in(0,1)$$

elde edilir. Buradan

$$C=\left(1+\frac{t_0}{2},2+\frac{t_0}{3}\right)=\left(\frac{5}{4},\frac{13}{6}\right)$$

bulunur.

6- Ders notlarında var.

7-

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=w\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\ni 0<\|x-x_0\|<\delta\wedge x\in U,$$

$$|f_1(x)-w_1|\le\|f(x)-w\|=\sqrt{|f_1(x)-w_1|^2+|f_2(x)-w_2|^2}<\varepsilon\wedge$$

,

$$|f_2(x)-w_2|\le\|f(x)-w\|=\sqrt{|f_1(x)-w_1|^2+|f_2(x)-w_2|^2}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0} f_1(x)=w_1\ \wedge\ \lim_{x\to x_0} f_2(x)=w_2$$

olur. Tersine

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=w_1\ \wedge\ \lim_{x\to x_0} f_2(x)=w_2\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1,\delta_2>0\ni 0<\|x-x_0\|<\delta_1,0<\|x-x_0\|<\delta_2$$

$$\wedge x\in U,|f_1(x)-w_1|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\wedge|f_2(x)-w_2|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\Rightarrow\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}\ i\c{c}in$$

$$\|f(x)-w\|=\sqrt{|f_1(x)-w_1|^2+|f_2(x)-w_2|^2}<\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2}=\varepsilon$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0} f(x)=w$$

8-

$F(x,y)=\left(x+x^2+y,x^2+y^2\right)$ fonksiyonunun $J_F(x,y)$ türev matrisi

$$DF(x,y)=J_F(x,y)=\begin{pmatrix}1+2x & 1\\ 2x & 2y\end{pmatrix}$$

olup, türev determinantı

$$\Delta_F(x,y) = \begin{vmatrix} 1+2x & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y + 4xy - 2x$$

olarak bulunur. Yine $\Delta_F(5,8) = 166 \neq 0$ olduğundan F fonksiyonu $(x,y) = (5,8)$ noktası civarında C^1- terslenebilirdir.

Şimdi tersinin türevini bulalım. $F(x,y) = (x + x^2 + y, x^2 + y^2) = (u,v)$ denirse $F^{-1}(u,v) = (x,y)$ olup,

$$\begin{aligned} DF^{-1}(u,v) &= (DF(x,y))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2x & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{2y+4xy-2x} \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{2y}{2y+4xy-2x} & \dfrac{-1}{2y+4xy-2x} \\ \dfrac{-2x}{2y+4xy-2x} & \dfrac{1+2x}{2y+4xy-2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.